8ο Μάθημα.

2/12/2019

Μελέτη του Ελεύθερου Απλού Τυχαίου Περιπάτου:

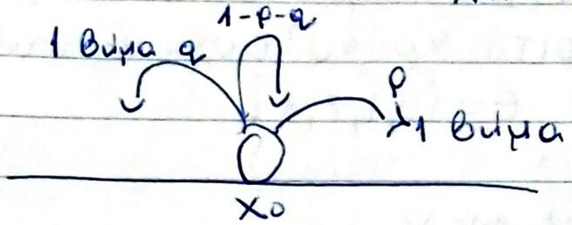
Έστω X_n η σ.δ. που περιγράφει την θέση ενός σωματιδίου την n-οστή (διακριτή) χρονική στιγμή, η κίνηση του οποίου περιγράφεται ως εξής:

$X_0 =$ αρχική θέση.

$X_1 = X_0 + Z_1$, όπου Z_1 η τ.μ. που περιγράφει την $1^η$ μετατόπιση

$X_2 = X_1 + Z_2$ όπου Z_2 -//- -//- την $2^η$ μετατόπιση.

$X_n = X_{n-1} + Z_n$ όπου Z_n παριστάνει τη n-οστή μετ/ση.



Συνοψίζοντας:

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Επιπλέον στον Ε.Α.Τ.Π. υποθέτουμε:

$$P(Z_i = z) = \begin{cases} p & z = 1 \\ 1-p-q & z = 0 \\ q & z = -1 \end{cases}$$

τα Z_i (= μετατοπίσεις) είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.
Επιπλέον η κίνηση του σωματιδίου δεν περιορίζεται.

1ο ερώτημα: $P(X_n = k) = P$(το σωματίδιο τη χρονική στιγμή n να βρίσκεται στη θέση k)

2ο ερώτημα: $P(k_1 \le k_n \le k_2)$ για n μεγάλο

Παράδειγμα: Η Ελένη και η Όλγα παίζουν ένα παιχνίδι. Η πιθ. νίκης της Ελένης είναι $P(\text{νίκης } E) = 1/2$ και $P(\text{νίκης } O) = 1/3$

$P(\text{ισοπαλίας}) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$.

α. Ποια η πιθανότητα μετά από 10 παιχνίδια η Όλγα να έχει 2 νίκες περισσότερες? $(P(X_{10}=2))$

β. Ποια η πιθ. μετά από 200 παιχνίδια η Όλγα να προηγείται 20-30 νίκες. $(P(20 \leq X_{200} \leq 30)$

Λύση: Έστω X_n η σ.δ. που παριστάνει τον αριθμό των νικών που προηγείται η Όλγα της Ελένης μετά το τέλος του παιχνιδιού.

Πρόκειται για σ.δ. σε διακριτό χρόνο (επειδή παρατηρούμε αμέσως το τέλος του n-οστού παιχνιδιού με διακριτό χώρο καταστάσεων).

Το σύνολο των δυνατών τιμών της είναι

$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

$X_0 = 0$

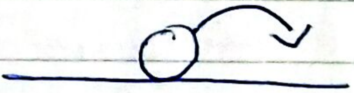
$X_1 = Z_1$

$X_2 = Z_1 + Z_2$

$X_n = \sum Z_i$

$$P(Z_i = z) = \begin{cases} 1/2, & z = -1 \ (\text{χάνει η } O) \\ 1/3, & z = 1 \\ 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, & z = 0 \end{cases}$$

Αποδ 1ου ερωτήματος (κι λύση α)



$(k>0)$ $P(X_n = k) \overset{X_0=0}{=\!=}$

Έστω n_1 ο αριθμός των δεξιών βημάτων (νίκες O)

n_2 ο αριθμός των αριστερών βημάτων (ήττες O = νίκες E)

n_3 ο αριθμός των αναπηδήσεων (ισοπαλίες)

$n_1 - n_2 = k$

$n_1 + n_2 + n_3 = n$

Άρα $P(X_n = k) \overset{X_0=0}{=\!=} \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ n_1-n_2=k}}$

□ □ □ ... □

Οι δυνατοί τρόποι επιλογής είναι: $\binom{n}{n_1}$ με αντίστοιχ. πιθ. p^{n_1}

n-δοκιμές σ' αυτές θέλω n_1 το πλήθος βημ. ΔΕΞΙΑ.

Στις υπόλοιπες "δοκιμές" που είναι σε πλήθος $n-n_1$ θέλω n_2 βήματα ΑΡΙΣΤΕΡΑ. Αυτό γίνεται με $\binom{n-n_1}{n_2}$ τρόπους $\xrightarrow{\text{πιθ.}}$ q^{n_2}

Στις υπόλοιπες $n-n_1-n_2=n_3$ δοκιμές θέλω το n_3 πλήθος ισοπαλίες.
Αυτό γίνεται με 1 τρόπο $\longrightarrow (1-p-q)^{n_3}$

$$P(X_n=k)=\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_1-n_2=k}} \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdot p^{n_1}\cdot q^{n_2}(1-p-q)^{n_3}=$$

$$=\sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_1-n_2=k}} \frac{n!\quad (n-\cancel{n_1})!\cdot p^{n_1}q^{n_2}(1-p-q)^{n_3}}{n_1!\,(n-n_1)!\,(n-n_1-n_2)!\,n_2!}$$

Αν $k<0$: $n_2-n_1=k$

n_1	n_2	n_3
(6,	4,	0)
(5,	3,	2)
(4,	2,	4)
(3,	1,	6)
(2,	0,	8)

Αποδ. 2ου ερωτήματος (κ λύση) β

$$P(k_1\le X_n\le k_2)\ \underset{=}{\overset{k_1,k_2>0}{=}}\ \sum_{k=k_1}^{k_2} P(X_n=k)=$$

$$=\sum_{k=k_1}^{k_2}\ \sum_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ n_1-n_2=k}} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!}\,p^{n_1}q^{n_2}(1-p-q)^{n_3}$$

ΑΚΡΙΒΗΣ ΤΙΜΗ

$n_1+n_2+n_3=200$
$n_1-n_2=20\ \ldots 24 \ldots\ 30$
$=20(1)30$

Προσεγγιστικά:
Έστω $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ανεξ/τες και ισόνομες τ.μ. με πεπερασμένη μέση τιμή $\mu = E(Y_i)$ και διακύμανση $\sigma^2 = Var\, Y_i$. Σύμφωνα με το κεντρικό οριακό θεώρημα ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i - n\mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \overset{προσ.}{\sim} N(0,1)$

για μεγάλο n.

$$P(k_1 \le X_n \le k_2) = P(k_1 \le \sum_{i=1}^{n} Z_i \le k_2) \overset{*}{=}$$

Είναι Z_i ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με

$$\mu = E(Z_i) = 1 \cdot P(Z_i = 1) + 0 \cdot P(Z_i = 0) + (-1) \cdot P(Z_i = -1) =$$
$$= p - q \quad \text{πεπερασμένο.}$$

και $\sigma^2 = Var(Z_i) = EZ_i^2 - (EZ_i)^2 =$

$$= 1^2 P(Z_i = 1) + (-1)^2 P(Z_i = -1) - (p-q)^2$$
$$= p + q - (p-q)^2$$

$\overset{*}{=}$ διόρθωση συνέχειας

$$P(k_1 - 1/2 \le \sum Z_i \le k_2 + 1/2) =$$

$$= P\left(\frac{k_1 - \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n \sigma^2}} \le \frac{\sum Z_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \le \frac{k_2 + \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \right)$$

$$\simeq P\left(\frac{k_1 - \frac{1}{2} - n \cdot \mu}{\sqrt{n \sigma^2}} \le Y \le \frac{k_2 + \frac{1}{2} - n \cdot \mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \right)$$

όπου $Y \sim N(0,1)$

$$= \Phi\left(\frac{k_2 + \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \right) - \Phi\left(\frac{k_1 - \frac{1}{2} - n\mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} \right)$$

$k_1 = 20$, $k_2 = 30$, $\mu = p - q$

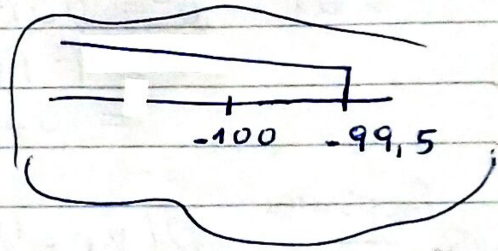
$n = 200$, $\sigma^2 = p + q - (p-q)^2$

Παρατηρήσεις:

1) $P(X_n > a)$ όπου a μεγάλος θετικός αριθμός
$\mu = E Z_i > 0$, $\sigma^2 = Var Z_i$ πεπερασμένη κ' $n \to \infty$
↳ $p - q > 0$

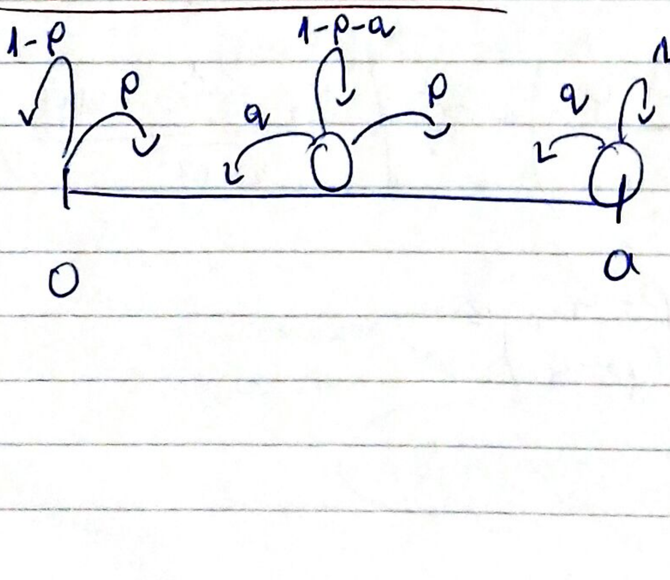
$$P(X_n > a) = 1 - P(X_n \le a) = 1 - P\left(\Sigma Z_i \le a + \tfrac{1}{2}\right) =$$
$$= 1 - P\left(\frac{\Sigma Z_i - n\cdot\mu}{\sqrt{n\cdot\sigma^2}} \le \frac{a + 1/2 - n\cdot\mu}{\sqrt{n\cdot\sigma^2}}\right)$$
$$\simeq 1 - \Phi\left(\frac{a + 1/2 - n\cdot\mu}{\sqrt{n\cdot\sigma^2}}\right) \to 1 - \Phi(-\infty) = 1 - 0 = 1.$$

2) $P(X_n \le b)$ όπου b μεγάλος αρνητικός αριθμός
$\mu = E Z_i < 0$ $\sigma^2 = Var Z_i$ πεπ/νη κ' $n \to \infty$ (μεγάλο)
↳ $p - q < 0$



$$P(X_n \le b) = P\left(\Sigma Z_i \le b + \tfrac{1}{2}\right) =$$
$$= P\left(\frac{\Sigma Z_i - n\mu}{\sqrt{n\cdot\sigma^2}} \le \frac{b + 1/2 - n\mu}{\sqrt{n\cdot\sigma^2}}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{b + 1/2 - n\mu}{\sqrt{n\cdot\sigma^2}}\right) \to \Phi(+\infty) = 1$$

Εύρεση Οριακών Πιθανοτήτων για τον Τυχαίο Περίπατο με δύο φράγματα ανάκλασης στο 0 κ' στο a όπου η κίνηση περιγράφεται ως εξής:



$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 \cdots & a-1 & a \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ a-1 \\ a \end{array} & \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & & 0 & 0 \\ q & 1-p-q & p & & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-p-q & p & 0 & 0 \\ & & & & & \\ & & & q & 1-p-q & p \\ & & & & q & 1-q \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Μη διαχ/μη Μ.Α
πεπ/νο πλήθος
κατ/σεων
⇓
Θετ. επ/κη
κι επιπλέον είναι
απεριοδική => εργοδική.

πίνακας $(a+1)\times(a+1)$

$(x_0 \ x_1 \ x_2 \dots x_a) = (x_0 \ x_1 \dots x_a)\cdot P \Rightarrow$

$x_0 = x_0(1-p) + x_1 q \Rightarrow x_0 \cdot p = x_1 q \Rightarrow x_1 = x_0 \dfrac{p}{q}$

$x_1 = x_0 p + x_1(1-p-q) + x_2 \cdot q \Rightarrow x_1 p = x_2 q \Rightarrow$
$\Rightarrow x_2 = x_0 \cdot \left(\dfrac{p}{q}\right)^2$

$x_a = x_{a-1} p + x_a(1-a) \Rightarrow x_a q = x_{a-1} p \Rightarrow$
$\Rightarrow x_a = x_0 \left(\dfrac{p}{q}\right)^a$

ΑΡΑ: $x = \left(x_0, x_0 \dfrac{p}{q}, x_0\left(\dfrac{p}{q}\right)^2, \dots, x_0\left(\dfrac{p}{q}\right)^a\right)$

Μια λύση για $x_0 = 1$: $x = \left(1, \dfrac{p}{q}, \dots, \left(\dfrac{p}{q}\right)^a\right)$

Αρα το διάνυσμα των οριακών πιθανοτήτων

$\pi = cx = c\left(1, \dfrac{p}{q}, \left(\dfrac{p}{q}\right)^2, \dots, \left(\dfrac{p}{q}\right)^a\right)$ → όροι γ.π. πλήθος $a+1$ με πρώτο όρο 1 κι λόγο $\dfrac{p}{q}$

τ.ω. $\displaystyle\sum_{i=0}^{a} \pi_i = 1$ αρα θελω να βρω

Αν $p \neq q$: $c \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{a} (p/q)^i = 1 \Rightarrow c\,\dfrac{(p/q)^{a+1} - 1}{p/q - 1} = 1 \Rightarrow c = \dfrac{p/q - 1}{(p/q)^{a+1} - 1}$

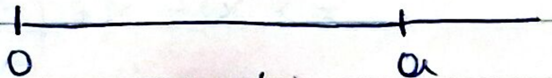
$c \cdot (a+1) = 1 \Rightarrow c = \dfrac{1}{a+1}$

$$\Pi = \frac{p/q - 1}{(p/q)^{a+1} - 1}\left(1, \frac{p}{q}, \left(\frac{p}{q}\right)^2, \dots, \left(\frac{p}{q}\right)^a\right) \quad \text{αν} \quad p \neq q$$

$$\Pi = \left(\frac{1}{a+1}, \dots, \frac{1}{a+1}\right) \quad \text{αν} \quad p = q$$

Δηλ. $$\pi_i = \begin{cases} (p/q)^i \cdot \dfrac{1 - p/q}{1 - (p/q)^{a+1}}, & p \neq q \\ \dfrac{1}{a+1} & p = q \end{cases}$$

Δεύτερος τρόπος εύρεσης των Ορ. Π.Θ. για την διαδικασία με ένα φράγμα ανάκλασης το 0.



2 φραγμ. -> 1 φράγμα ανακλ. στο 0 για $a \to \infty$

$$\pi_i = \begin{cases} \left(\frac{p}{q}\right)^i \left(1 - \frac{p}{q}\right) \\ \nexists \end{cases}$$ $0 \ \forall i$

$p = q$
$p < q \Rightarrow \frac{p}{q} < 1$
$p > q \Rightarrow \frac{p}{q} > 1$

! Καλύτερο από αυτό είναι το ευθύ κ' το αντίστροφο του foster !

ΒΙΒΛΙΑΡΑΚΙ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

(35) Αφίξεις Poisson(λ), ουρά απείρου χωρητικ.
σ.π.π. χρόνου $b(t)$, $t \geq 0$

X_n αριθμός των πελατών στο ταμείο κ' σειρά ουρά αμέσως μετά την εξυπηρέτηση του n-οστού πελάτη.

Έχω σ.δ. σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο καταστάσεων και $S = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

a.

$$P = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \vdots & b_0 & b_1 & b_2 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$ $b_k = P(B=k) = P\left(\begin{smallmatrix} k \text{ αφίξεις} \\ \text{στο χρόνο} \\ \text{εξυπ.} \end{smallmatrix}\right)$

$$b_k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} b(t)\,dt$$

β. Να βρεθούν οι πιθ. σε κατάσταση στατιστικής ισορροπίας.

$$b_k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \mu \cdot e^{-\mu t}\,dt$$

$$= \frac{\rho^k}{(1+\rho)^{k+1}}$$ ... καταλήγω $X_k = X_0 e^k$.

Όμοια με την 35 είναι η 43, 51

43 Το δεύτερο ερώτημα μας ζητάει πε όταν βλέπω στατιστική ισορ. = ορ. πιθ.